Triple zeta values and asymptotic properties of triple polylogarithms (Analytic Number Theory : Number Theory through Approximation and Asymptotics)

町出, 智也

数理解析研究所講究録
第 1874 巻 2014 年 55-63

Triple zeta values and asymptotic properties of triple polylogarithms

近畿大学・量子コンピューターセンター　町出　智也

Tomoya Machide
Research Center for Quantum Computing,
Interdisciplinary Graduate School of Science and Engineering,
Kinki University

概要

本原稿では、３重ポリロガリズムの漸近展開を用いて３重ゼータ値の係数付き和公式を証明する方法を略説します。

1　背景と結果

多重ゼータ値はリーマンゼータ関数 $\zeta(s):=\sum_{m=1}^{\infty}1/m^{s}$ の特殊値の一般化であり、正整数の組 $(l_{1}, l_{2}, \ldots, l_{n})\in \mathbb{N}^{n}$ （ただし $l_{1}\geq 2$）に対して、次のように定義されます：

$$\zeta(l_{1}, l_{2}, \ldots, l_{n}):=\sum_{m_{1}>m_{2}>\cdots>m_{n}>0}\frac{1}{m_{1}^{l_{1}}m_{2}^{l_{2}}\cdots m_{n}^{l_{n}}}.$$

整数 $l=l_{1}+\cdots+l_{n}$ と n をそれぞれ“重さ”と“深さ”と呼びます。多重ゼータ値は様々な分野で現れ最近になって盛んに研究されていますが [18]、歴史的には Euler [2] によって初めて２重ゼータ値の場合（深さが2の場合）が研究されました。Euler は多重ゼータ値の後の研究の指針となる公式（和公式）を証明しました：

$$\sum_{\substack{l_{1}\geq 2, l_{2}\geq 1\\(l=l_{1}+l_{2})}}\zeta(l_{1}, l_{2})=\zeta(l). \tag{1.1}$$

公式 (1.1) は、重さ l の２重ゼータ値の総和はリーマンゼータ値 $\zeta(l)$ と等しいことを主張しています。公式 (1.1) は近年、一般の深さ n の場合に拡張され [4, 7, 19]、

更に様々な一般化が研究されています [1, 5, 6, 8, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 17]。特に Gangl-Kaneko-Zagier [3] はパラメータ付きの一般化を 2 重ゼータ値の場合で与えました：

$$\sum_{\substack{l_1\geq 2, l_2\geq 1\\(l=l_1+l_2)}} \left((x_1+x_2)^{l_1-1}(x_2^{l_2-1}+x_1^{l_2-1}) - x_1^{l_1-1}x_2^{l_2-1} - x_2^{l_1-1}x_1^{l_2-1}\right)\zeta(l_1,l_2) \tag{1.2}$$
$$= \left(\sum_{\substack{l_1,l_2\geq 1\\(l_1+l_2=l)}} x_1^{l_1-1}x_2^{l_2-1}\right)\zeta(l).$$

(Gangl-Kaneko-Zagier は、(1.2) を和公式の一般化としてではなく拡張複シャッフル関係式を記述するために使用していますが、ここでは和公式の一般化として捉えて話を進めます。) 実際、$(x_1, x_2) = (1, 0)$ とすれば (1.1) を導くことができるので、(1.2) はオリジナルの和公式を含みます。更に $(x_1, x_2) = (1, 1)$ を代入すれば、重み付き和公式 [15]

$$\sum_{\substack{l_1\geq 2, l_2\geq 1\\(l=l_1+l_2)}} (2^{l_1}-1)\zeta(l_1,l_2) = l\zeta(l) \tag{1.3}$$

を得ることができます。

本原稿の目的は、筆者 [11] によって示された次の 3 重ゼータ値のパラメータ付き和公式の証明方法を略説することです。

定理 1.1. S_3、A_3 をそれぞれ 3 次対称群、3 次交代群とする。$\sigma \in S_3$ に対して、$\langle\sigma\rangle$ を σ で生成される巡回群とする。更に $x_{j_1\cdots j_n}^k := (x_{j_1}+\cdots+x_{j_n})^k$ と定める（例：$x_{12}^k = (x_1+x_2)^k$、$x_{123}^k = (x_1+x_2+x_3)^k$）。

この時、整数 $l \geq 4$ に対して次が成り立つ：

$$\sum{}' \Bigg[\sum_{\sigma\in S_3} x_{\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3)}^{l_1-1} x_{\sigma(2)\sigma(3)}^{l_2-1} x_{\sigma(3)}^{l_3-1} - \sum_{\sigma\in A_3}\Bigg(\sum_{\nu\in\langle(23)\rangle} x_{\sigma(1)\sigma(3)}^{l_1-1} x_{\sigma\nu(2)\sigma\nu(3)}^{l_2-1} x_{\sigma\nu(3)}^{l_3-1}$$
$$+ x_{\sigma(3)\sigma(1)}^{l_1-1} x_{\sigma(1)}^{l_2-1} x_{\sigma(2)}^{l_3-1} - x_{\sigma(1)}^{l_1-1} x_{\sigma(2)}^{l_2-1} x_{\sigma(3)}^{l_3-1}\Bigg)\Bigg]\zeta(l_1,l_2,l_3) \tag{1.4}$$
$$= \left(\sum_{\substack{l_1,l_2,l_3\geq 1\\(l_1+l_2+l_3=l)}} x_1^{l_1-1}x_2^{l_2-1}x_3^{l_3-1}\right)\zeta(l).$$

ただし $\sum' = \sum_{\substack{l_1\geq 2, l_2, l_3\geq 1\\(l=l_1+l_2+l_3)}}$ とする。

より具体的な公式 (1.4) の表示は末尾の付録 A を参照してください。

2 重ゼータ値の場合と同様に、パラメータ (x_1, x_2, x_3) に適当な値を代入することにより、下記の重み付き和公式を得ることができます。尚、2 番目の公式は Guo-Xie [5] より示された結果です。詳しい証明は [11] を参照してください。

系 1.2 (c.f. [5]). 整数 $l \geq 4$ に対して次が成り立つ：

$$\begin{aligned}\sum{}' \left(3^{l_1-1}2^{l_2} - 2^{l_1+l_2-1} - 2^{l_1-1}\right)\zeta(l_1,l_2,l_3) &= \frac{(l-4)(l+1)}{6}\zeta(l),\\ \sum{}' \left(2^{l_1+l_2-1} + 2^{l_1-1} - 2^{l_2}\right)\zeta(l_1,l_2,l_3) &= l\zeta(l),\\ \sum{}' \left(3^{l_1-1} - 1\right)2^{l_2}\zeta(l_1,l_2,l_3) &= \frac{(l-1)(l+4)}{6}\zeta(l).\end{aligned} \tag{1.5}$$

定理 1.1 の証明のアイディアを説明しましょう。そのために本原稿のもう一つの主役である多重ポリロガリズムを紹介します。それは正整数の組 $(l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{N}^n$ と複素数の組 $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ $(|z_i| < 1)$ に対して、次のように定義されます：

$$Li_{l_1,\ldots,l_n}(z_1,\ldots,z_n) := \sum_{m_1>\cdots>m_n>0} \frac{z_1^{m_1-m_2}\cdots z_{n-1}^{m_{n-1}-m_n} z_n^{m_n}}{m_1^{l_1}\cdots m_{n-1}^{l_{n-1}} m_n^{l_n}}.$$

定義から次のことが直ちに分かります：

$$\lim_{(z_1,\ldots,z_n)\to(1,\ldots,1)} Li_{l_1,\ldots,l_n}(z_1,\ldots,z_n) = \begin{cases}\zeta(l_1,\ldots,l_n) & (l_1 \geq 2),\\ (\text{発散}) & (l_1 = 1).\end{cases}$$

Ihara-Kaneko-Zagier [9] は

$$Li_{l_1,\ldots,l_n}(\{z\}^n) \qquad \Bigl(\{z\}^n := (\underbrace{z,\ldots,z}_{n})\Bigr)$$

の $z \nearrow 1$ における漸近展開を計算し、多重ゼータ値を拡張した "正規化多重ゼータ値" を定義しました。

命題 1.3. 任意の関数 $f(z), g(z)$ に対して、"$f(z) \sim g(z)$" は $z = 1$ の近傍でほぼ等しいことを、正確には次が成り立つことを意味する。

$$f(z) - g(z) = O\Bigl((1-z)\bigl(\log(1-z)\bigr)^J\Bigr) \quad (z \nearrow 1). \tag{1.6}$$

ただし、O はランダウの記号、J は $f(z), g(z)$ に依存する正の実数である。

この時、任意の正整数の組 $(l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{N}^n$ に対して、ある多項式 $Z_{l_1,\ldots,l_n}(T)$ が存在して、次が成り立つ：

$$Li_{l_1,\ldots,l_n}(\{z\}^n) \sim Z_{l_1,\ldots,l_n}(-\log(1-z)). \tag{1.7}$$

定義 1.4. 正整数の組 $(l_1,\dots,l_n)\in\mathbb{N}^n$ に対して、正規化多重ゼータ値を次のように定義する：

$$\zeta^{ш}(l_1,\dots,l_n) := Z_{l_1,\dots,l_n}(0).$$

ただし、$Z_{l_1,\dots,l_n}(T)$ は命題 1.3 で現れる多項式である。

注意 1.5. 正規化多重ゼータ値の定義は調和関係式とシャッフル関係式に対応した２種類があります。本原稿ではその内のシャッフル関係式に対応した定義を採用しています。もう一つの定義については [9] を参照してください。

勿論 $l_1 \geq 2$ の時は $\zeta^{ш}(l_1,\dots,l_n)=\zeta(l_1,\dots,l_n)$ となります。$l_1=1$ の時の値は多重ゼータ値の線形結合になります。(末尾の付録 B に深さが 2 と 3 の場合の例を載せています)。

係数付き和公式 (1.4) を証明する方法は以下の通りです：

1. 1 〜 3 重ポリロガリズムに関して次のことを実行する。
   (a) 調和関係式から等式を導く。
   (b) シャッフル関係式から等式を導く。
   (c) 上記等式に現れるポリロガリズムの漸近展開の定数項を求める。
2. (a)〜(c) から、正規化多重ゼータ値の公式を導く。
3. 係数付き和公式 (1.4) を証明する。

本原稿の残りの部分では、1.(b) 以外（シャッフル関係式以外）について軽く触れます。1.(b) は記述が煩雑になるため省略しますが、詳細については [11] を参照してください。

2 多重ポリロガリズム

2.1 調和関係式から導かれる等式

調和関係式とは和の分解から導かれる等式です。例えば次の和の分解

$$\sum_{m_1,m_2>0} = \sum_{m_1>m_2>0} + \sum_{m_2>m_1>0} + \sum_{m_1=m_2>0}$$

は２重ポリロガリズムの調和関係式

$$\begin{aligned}
Li_{l_1}(z)Li_{l_2}(z) &= \sum_{m_1>0}\sum_{m_2>0}\frac{z^{m_1}}{m_1^{l_1}}\frac{z^{m_2}}{m_2^{l_2}} \\
&= \sum_{m_1>m_2>0}\frac{z^{m_1+m_2}}{m_1^{l_1}m_2^{l_2}} + \sum_{m_2>m_1>0}\frac{z^{m_1+m_2}}{m_2^{l_2}m_1^{l_1}} + \sum_{m=m_1=m_2>0}\frac{z^{2m}}{m^{l_1+l_2}} \\
&= Li_{l_1,l_2}(z,z^2) + Li_{l_2,l_1}(z,z^2) + Li_{l_1+l_2}(z^2).
\end{aligned}$$

を導きます。同じようにして、和の分解

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{m_1>m_2>0\\ m_3>0}} &= \sum_{m_1>m_2>m_3>0} + \sum_{m_1>m_3>m_2>0} + \sum_{m_3>m_1>m_2>0} \\
&\quad + \sum_{m_1=m_3>m_2>0} + \sum_{m_1>m_2=m_3>0},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{m_1,m_2,m_3>0} &= \sum_{\sigma\in S_3}\sum_{m_{\sigma(1)}>m_{\sigma(2)}>m_{\sigma(3)}>0} \\
&\quad + \sum_{\tau\in A_3}\sum_{m_{\tau(1)}=m_{\tau(2)}>m_{\tau(3)}>0} + \sum_{\tau\in A_3}\sum_{m_{\tau(1)}>m_{\tau(2)}=m_{\tau(3)}>0} + \sum_{m_1=m_2=m_3>0}
\end{aligned}$$

から、３重ポリロガリズムの調和関係式が得られます：

補題 2.1. 正整数 l_1, l_2, l_3 に対して次が成り立つ：

$$\begin{aligned}
Li_{l_1,l_2}(z,z^2)Li_{l_3}(z) &= \sum_{\sigma\in\{e,(132),(23)\}} Li_{l_{\sigma(1)},l_{\sigma(2)},l_{\sigma(3)}}(z,z^2,z^3) \qquad (2.1)\\
&\quad + Li_{l_1+l_3,l_2}(z^2,z^3) + Li_{l_1,l_2+l_3}(z,z^3),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Li_{l_1}(z)Li_{l_2}(z)Li_{l_3}(z) &= \sum_{\sigma\in S_3} Li_{l_{\sigma(1)},l_{\sigma(2)},l_{\sigma(3)}}(z,z^2,z^3) \qquad (2.2)\\
&\quad + \sum_{\sigma\in A_3} Li_{l_{\sigma(1)}+l_{\sigma(2)},l_{\sigma(3)}}(z^2,z^3) + \sum_{\sigma\in A_3} Li_{l_{\sigma(1)},l_{\sigma(2)}+l_{\sigma(3)}}(z,z^3) \\
&\quad + Li_{l_1+l_2+l_3}(z^3).
\end{aligned}$$

　上記の調和関係式から簡単な計算により次の等式が得られます：

命題 2.2. 正整数 l_1, l_2, l_3 に対して次が成り立つ：

$$\begin{aligned}
&Li_{l_1}(z)Li_{l_2}(z)Li_{l_3}(z) \\
&\quad - \sum_{\sigma\in A_3} Li_{l_{\sigma(1)},l_{\sigma(2)}}(z,z^2)Li_{l_{\sigma(3)}}(z) + \sum_{\sigma\in A_3} Li_{l_{\sigma(1)},l_{\sigma(2)},l_{\sigma(3)}}(z,z^2,z^3) \\
&= Li_{l_1+l_2+l_3}(z^3).
\end{aligned}$$

2.2 漸近展開の定数項

$F(z)$ を漸近展開

$$F(z) \sim P(-\log(1-z))$$

を持つ関数とします（ただし $P(T)$ はある多項式)。この時、C_0 を漸近展開の定数項を抜き取る関数、つまり

$$C_0\bigl(F(z)\bigr) := P(0)$$

と定めます。例えば、$C_0\bigl(Li_{l_1,\dots,l_n}(\{z\}^n)\bigr) = \zeta^{ш}(l_1,\dots,l_n)$ となります。

命題 2.3. l_1, l_2, l_3 を正整数とする。$\langle z\rangle^n = (z, z^2, \dots, z^n)$ と定める。この時、次が成り立つ：

$$C_0\bigl(Li_{l_1,l_2}(\langle z\rangle^2)\bigr) = \zeta^{ш}(l_1,l_2) + \begin{cases} 0 & (l_1 > 1 \ or\ l_2 > 1), \\ -\frac{\zeta(2)}{2} & (l_1 = l_2 = 1), \end{cases}$$

$$C_0\bigl(Li_{l_1,l_2,l_3}(\langle z\rangle^3)\bigr) = \zeta^{ш}(l_1,l_2,l_3) + \begin{cases} 0 & (l_1 > 1 \ or\ l_2 > 1), \\ -\frac{\zeta(2)\zeta(l-2)}{2} & (l_1 = l_2 = 1 \ and\ l_3 > 1), \\ \frac{\zeta(3)}{3} & (l_1 = l_2 = l_3 = 1). \end{cases}$$

証明のアイディアですが、多重ポリロガリズムの調和関係式を使って、$C_0\bigl(Li_{l_1,l_2}(\{z\}^2)\bigr)$ と $C_0\bigl(Li_{l_1,l_2,l_3}(\{z\}^3)\bigr)$ の場合に帰着させます。

3 係数付き和公式 (1.4) の証明

係数付き和公式 (1.4) の証明の概略を与えます。

証明の概略 l を 4 以上の整数とする。l_1, l_2, l_3 を $l = l_1 + l_2 + l_3$ を満たす正整数とする。命題2.2 と 2.3 より

$$\zeta^{ш}(l_1)\zeta^{ш}(l_2)\zeta^{ш}(l_3) - \sum_{\sigma\in A_3}\zeta^{ш}(l_{\sigma(1)}, l_{\sigma(2)})\zeta^{ш}(l_{\sigma(3)}) + \sum_{\sigma\in A_3}\zeta^{ш}(l_{\sigma(1)}, l_{\sigma(2)}, l_{\sigma(3)})$$
$$= \zeta^{ш}(l_1 + l_2 + l_3)$$

が成り立つ。$(-\frac{\zeta(2)}{2}, -\frac{\zeta(2)\zeta(l-2)}{2}$ の値が出現した場合は互いに打ち消し合います。)
$x_1^{l_1-1}x_2^{l_2-1}x_3^{l_3-1}$ をかけて和 $\sum^{\dagger} = \sum_{\substack{l_1,l_2,l_3\geq 1 \\ (l_1+l_2+l_3=l)}}$ を取ることにより

$$\sum\nolimits^{\dagger} x_1^{l_1-1}x_2^{l_2-1}x_3^{l_3-1}\zeta^{ш}(l_1)\zeta^{ш}(l_2)\zeta^{ш}(l_3)$$

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{\sigma\in A_3}{\sum}^{\dagger} x_{\sigma(1)}^{l_1-1}x_{\sigma(2)}^{l_2-1}x_{\sigma(3)}^{l_3-1}\zeta^{ш}(l_1,l_2)\zeta^{ш}(l_3)\\
&+\sum_{\sigma\in A_3}{\sum}^{\dagger} x_{\sigma(1)}^{l_1-1}x_{\sigma(2)}^{l_2-1}x_{\sigma(3)}^{l_3-1}\zeta^{ш}(l_1,l_2,l_3)\\
=&\left({\sum}^{\dagger} x_1^{l_1-1}x_2^{l_2-1}x_3^{l_3-1}\right)\zeta^{ш}(l)
\end{aligned}
$$

が得られる（${\sum}^{\dagger}$ が S_3 で不変なことに注意)。正規化多重ゼータ値のシャッフル関係式（本原稿では全く説明していません。[11] を参照してください。）から次の等式を得る：

$$
\begin{aligned}
&{\sum}^{\dagger}\Bigg[\sum_{\sigma\in S_3} x_{\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3)}^{l_1-1}x_{\sigma(2)\sigma(3)}^{l_2-1}x_{\sigma(3)}^{l_3-1}-\sum_{\sigma\in A_3}\Bigg(\sum_{\nu\in\langle(23)\rangle} x_{\sigma(1)\sigma(3)}^{l_1-1}x_{\sigma\nu(2)\sigma\nu(3)}^{l_2-1}x_{\sigma\nu(3)}^{l_3-1}\\
&\quad +x_{\sigma(3)\sigma(1)}^{l_1-1}x_{\sigma(1)}^{l_2-1}x_{\sigma(2)}^{l_3-1}-x_{\sigma(1)}^{l_1-1}x_{\sigma(2)}^{l_2-1}x_{\sigma(3)}^{l_3-1}\Bigg)\Bigg]\zeta^{ш}(l_1,l_2,l_3) \qquad (3.1)\\
&=\left(\sum_{\substack{l_1,l_2,l_3\ge 1\\(l_1+l_2+l_3=l)}} x_1^{l_1-1}x_2^{l_2-1}x_3^{l_3-1}\right)\zeta(l).
\end{aligned}
$$

等式 (3.1) における $\zeta^{ш}(1,l_2,l_3)$ の係数を計算してみると、0 になること、つまり

$$
\sum_{\sigma\in S_3} x_{\sigma(2)\sigma(3)}^{l_2-1}x_{\sigma(3)}^{l_3-1}-\sum_{\sigma\in A_3}\left(\sum_{\nu\in\langle(23)\rangle} x_{\sigma\nu(2)\sigma\nu(3)}^{l_2-1}x_{\sigma\nu(3)}^{l_3-1}+x_{\sigma(1)}^{l_2-1}x_{\sigma(2)}^{l_3-1}-x_{\sigma(2)}^{l_2-1}x_{\sigma(3)}^{l_3-1}\right)=0
$$

がわかる。従って、(3.1) においては ${\sum}^{\dagger}$ を ${\sum}'$ に変更しても成り立つ。$l_1\ge 2$ の時 $\zeta^{ш}(l_1,l_2,l_3)=\zeta(l_1,l_2,l_3)$ が成り立つので、(1.4) を得る。 □

A 付録：パラメータ付き和公式の具体的な表示

パラメータ付き和公式 (1.4) を書き下すと次のようになります：

$$
\begin{aligned}
&{\sum}'\Bigg\{\Big(x_{123}^{l_1-1}x_{23}^{l_2-1}x_3^{l_3-1}+x_{132}^{l_1-1}x_{32}^{l_2-1}x_2^{l_3-1}+x_{213}^{l_1-1}x_{13}^{l_2-1}x_3^{l_3-1}\\
&\qquad +x_{231}^{l_1-1}x_{31}^{l_2-1}x_1^{l_3-1}+x_{312}^{l_1-1}x_{12}^{l_2-1}x_2^{l_3-1}+x_{321}^{l_1-1}x_{21}^{l_2-1}x_1^{l_3-1}\Big)\\
&\quad -\big(x_{13}^{l_1-1}x_{23}^{l_2-1}x_3^{l_3-1}+x_{21}^{l_1-1}x_{31}^{l_2-1}x_1^{l_3-1}+x_{32}^{l_1-1}x_{12}^{l_2-1}x_2^{l_3-1}\\
&\qquad +x_{13}^{l_1-1}x_{32}^{l_2-1}x_2^{l_3-1}+x_{21}^{l_1-1}x_{13}^{l_2-1}x_3^{l_3-1}+x_{32}^{l_1-1}x_{21}^{l_2-1}x_1^{l_3-1}\big)
\end{aligned}
$$

$$- \left(x_{12}^{l_1-1}x_2^{l_2-1}x_3^{l_3-1} + x_{23}^{l_1-1}x_3^{l_2-1}x_1^{l_3-1} + x_{31}^{l_1-1}x_1^{l_2-1}x_2^{l_3-1}\right)$$
$$\left. + \left(x_1^{l_1-1}x_2^{l_2-1}x_3^{l_3-1} + x_2^{l_1-1}x_3^{l_2-1}x_1^{l_3-1} + x_3^{l_1-1}x_1^{l_2-1}x_2^{l_3-1}\right) \right\} \zeta(l_1, l_2, l_3)$$
$$= \left(\sum_{\substack{l_1, l_2, l_3 \geq 1 \\ (l_1+l_2+l_3=l)}} x_1^{l_1-1}x_2^{l_2-1}x_3^{l_3-1} \right) \zeta(l).$$

B 付録：$\zeta^{ш}(1, l_2)$ と $\zeta^{ш}(1, l_2, l_3)$ の値

$\zeta^{ш}(1, l_2)$ と $\zeta^{ш}(1, l_2, l_3)$ の具体的な値は次のようになります：

$$\zeta^{ш}(1, l_2) = \begin{cases} -(\zeta(l-1, 1) + \zeta(l)) & (l_2 > 1), \\ 0 & (l_2 = 1), \end{cases}$$

$$\zeta^{ш}(1, l_2, l_3) = \begin{cases} -\big(\zeta(l_2, l_3, 1) + \zeta(l_2, 1, l_3) + \zeta(l_2+1, l_3) + \zeta(l_2, l_3+1)\big) & (l_2 > 1), \\ \zeta(l-2, 1, 1) + \zeta(l-1, 1) + \zeta(l-2, 2) + \zeta(l) & \left(\substack{l_2=1 \\ l_3>1}\right), \\ 0 & (l_i = 1). \end{cases}$$

参考文献

[1] M. Eie, W-C. Liaw and Y. L. Ong, *A restricted sum formula among multiple zeta values*, J. Number Theory **129**, 2009, 908–921.

[2] L. Euler, *Meditationes circa singulare serierum genus*, Novi Comm. Acad. Sci. Petropol. **20**, 1775, 140–186 ; reprinted in Opera Omnia Ser. I, vol. 15, Teubner, Berlin 1927, pp. 217—267.

[3] H. Gangl, M. Kaneko and D. Zagier, *Double zeta values and modular forms*, Automorphic forms and zeta functions, 71–106, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2006.

[4] A. Granville, *A decomposition of Riemann's zeta-function*, Analytic Number Theory(Kyoto, 1996), 95–101, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 247, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.

[5] L. Guo and B. Xie, *Weighted sum formula for multiple zeta values*, J. Number Theory **129**, 2009, 2747–2765.

[6] M. E. Hoffman, *On multiple zeta values of even arguments*, preprint; arXiv:1205.7051v2 [math.NT], 2012.

[7] M. E. Hoffman and C. Moen, *Sums of triple harmonic series*, J. Number Theory **60**, 1996, 329–331.

[8] M. E. Hoffman and Y. Ohno, *Relations of multiple zeta values and their algebraic expression*, J. Algebra **262**, 2003, 332–347.

[9] K. Ihara, M. Kaneko and D. Zagier, *Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values*, Compositio Math. **142**, 2006, 307–338.

[10] T. Machide, *Weighted sums with two parameters of multiple zeta values and their formulas*, Int. J. Number Theory **8**, 2012, 1903–1921.

[11] T. Machide, *Extended double shuffle relations and the generating function of triple zeta values of any fixed weight*, to apper in Kyushu J. Math.

[12] T. Machide, *Some restricted sum formulas for double zeta values*, to appear in Proc. Japan Acad., Ser. A.

[13] T. Machide, *A parameterized generalization of the sum formula for quadruple zeta values*, preprint; arXiv:1210.8005 [math.NT], 2012, submitted.

[14] Y. Ohno, *A generalization of the duality and sum formulas on the multiple zeta values*, J. Number Theory **74**, 1999, 39–43.

[15] Y. Ohno and W. Zudilin, *Zeta stars*, Commun. Number Theory Phys. **2**, 2008, 47–58.

[16] Y. L. Ong, M. Eie, and W-C. Liaw, *On generalizations of weighted sum formulas of multiple zeta values*, preprint.

[17] Z. Shen and T. Cai, *Some identities for multiple zeta values*, J. Number Theory **132**, 2012, 314–323.

[18] D. Zagier, *Values of zeta functions and their applications*, First European Congress of Mathematics, Vol. II(Paris, 1992), 497–512, Progr. Math., 120, Birkhäuser, Basel. 1994.

[19] D. Zagier, *Multiple zeta values*, unpublished manuscript, Bonn 1995.